UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

ADMITERE 2021: SESIUNI ONLINE DE PREGĂTIRE LA MATEMATICĂ

FUNCȚII DERIVABILE
(1)

Conf. univ. dr. MIRCEA RUS

Funcții derivabile

Lecția nr. 1

27 martie 2021

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ derivata funcției f în punctul x_0

- descrie viteza de variație *instantanee* a funcției f (în raport cu variabila de care depinde).
- **interpretare geometrică:**
  $f'(x_0)$ este panta tangentei la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$.
- **exemple de derivate:** *viteza instantanee* (a unui mobil) ca derivată a deplasării / distanței în raport cu timpul, *accelerația instantanee* ca derivată a vitezei în raport cu timpul, , *intensitatea curentului electric* printr-o secțiune a unui conductor ca derivată a sarcinii electrice ce trece prin conductor în raport cu timpul, *densitatea liniară de masă* a unui fir material ca derivată a masei în raport cu lungimea.
- $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ punct de *acumulare* pentru D pentru ca operația de trecere la limită să aibă sens (x_0 *nu* este punct *izolat*).
- limita poate să nu existe (f nu are derivată în x_0), poate să fie infinită (f are derivată în x_0, dar infinită; *nu* spunem însă că f este derivabilă) sau poate fi finită (f este *derivabilă* în x).
- valoarea $f'(x_0)$ este una *locală* (depinde doar de valorile lui f în apropierea lui x_0).

Un exemplu: dobânda compusă cu acumulare instantanee

$S_0 =$ suma de bani din cont la momentul inițial ($t = 0$).

$S(t) =$ suma de bani din cont la momentul $t \geq 0$ (obținută prin *acumularea dobânzii*; dobânda se aplică la întreaga sumă acumulată până la acel moment, sumă ce include dobânzile anteriore).

$r =$ rata dobânzii pe unitatea de timp (constantă) (ex: 3%/an).

Se cere expresia lui $S(t)$.

. . . .

Dobânda corespunzătoare intervalului de timp $[t, t + \Delta t]$ este $S(t) \cdot r \cdot \Delta t$

$$S(t + \Delta t) = S(t) + r \cdot \Delta t \cdot S(t) \Leftrightarrow \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = r \cdot S(t) \Big| \lim_{\Delta t \to 0}$$

dobânda se aplică instantaneu!

$S'(t) = r \cdot S(t) \quad (t \geq 0), \quad S(0) = S_0$. Soluția problemei este: $\boxed{S(t) = S_0 \cdot e^{rt}}$ (se va arăta ulterior). Diferența față de suma ce s-ar fi obținut prin aplicarea *dobânzii simple* (când dobânda se calculează doar la finalul perioadei) este: $S_0 \cdot e^{rt} - (S_0 + r \cdot t \cdot S_0) = S_0 \left(e^{rt} - 1 - rt\right)$.

De exemplu, dacă $r = 5\%$/an , atunci suma finală în cont după $t = 20$ ani va fi $2,718... \cdot S_0$ față de $2 \cdot S_0$ cât ar fi fost prin aplicarea dobânzii simple.

Câteva precizări:

- Pentru calculul derivatelor, vom presupune cunoscute (fără a le prezenta / recapitula): regulile de derivare, derivatele funcțiilor elementare de bază.
  Unde va fi cazul, se vor aminti în context (în rezolvarea problemelor).
- Numerele problemelor corespund celor din culegerea de probleme
  Teste grilă de matematică 2020, U.T. Press, Cluj-Napoca 2020
  disponibilă și online la adresa `https://admitereonline.utcluj.ro/matematica/`

Derivarea funcțiilor compuse și a inversei unei funcții

$$(f_2 \circ f_1)' = (f_2' \circ f_1) \cdot f_1'$$

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))' = (f_3' \circ (f_2 \circ f_1)) \cdot ((f_2 \circ f_1))' = (f_3' \circ f_2 \circ f_1) \cdot (f_2' \circ f_1) \cdot f_1'$$

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)' = \ ?$$ (studiu individual)

<u>Aplicație</u> : <u>P382</u>

381–382 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\underbrace{(x+1)(x+2)\cdots(x+2019)}_{h(x)}$ și fie $g=f\circ f\circ f$.

- $f'(0)$ este ...
- $g'(0)$ este ...

Rezolvare. $f(x)=x\cdot h(x) \Rightarrow f'(x)=1\cdot h(x)+x\cdot h'(x) \Rightarrow f'(0)=h(0)$

$\Rightarrow f'(0)=2019!$ $(1\cdot 2\cdot 3\cdots 2019)$

$$g'=(f'\circ f\circ f)\cdot(f'\circ f)\cdot f'$$

$$g'(0)=f'(f(f(0)))\cdot f'(f(0))\cdot f'(0) \qquad \begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=2019! \end{cases}$$

$$g'(0)=(f'(0))^3=(2019!)^3 \Rightarrow g'(0)=(2019!)^3$$

Metoda se poate aplica pentru o problemă mai generală:

$$\begin{cases} f \text{ derivabilă} \\ f(x_0)=x_0 \end{cases} \Rightarrow (\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})'(x_0)=(f'(x_0))^n.$$

731 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x+2$ și fie f^{-1} inversa ei. Valoarea derivatei $\left(f^{-1}\right)'(-2)$ este ...

Admitere 2017

Rezolvare.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\left[\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}\right] \quad \left(x=f^{-1}(y)\right)$$

$f'(x)=3x^2+3>0 \Rightarrow f \nearrow$ (injectivă) ; $\underbrace{f(-\infty)=-\infty\,;\, f(\infty)=\infty}_{f(\mathbb{R})=\mathbb{R} \text{ (surjectivă)}}$

$\Rightarrow f$ bijectivă $(\exists f^{-1})$

soluție unică (se intuiește)

$\boxed{y=-2}$: $x^3+3x+2=-2 \Leftrightarrow x^3+3x=-4 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$; $f'(-1)=6$

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(-2)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$

R $\dfrac{1}{6}$

724 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[5]{x^3-\mathrm{tg}^3 x}$. Valoarea lui $f'(0)$ este …

Admitere 2017

$f=g\circ u$; $f(x)=\sqrt[5]{u(x)}$; $g(y)=\sqrt[5]{y}$; $u(x)=x^3-\mathrm{tg}^3 x$.

$f'(x)=g'(u(x))\cdot u'(x)=\frac{1}{5}(u(x))^{-\frac{4}{5}}\cdot u'(x)=\dfrac{u'(x)}{5(u(x))^{4/5}}$! $u(0)=0$

$f'(0)$ nu poate fi calculată după formula generală (g nu este derivabilă în 0)

Idee: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (doar dacă limita există)

limita poate să nu existe

poate exista

724 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[5]{x^3-\mathrm{tg}^3 x}$. Valoarea lui $f'(0)$ este ...

Admitere 2017

Rezolvare. O altă abordare (folosind definiția derivatei)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^3-\mathrm{tg}^3x}}{x}=$$

5 impar

$$\sqrt[5]{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\mathrm{tg}^3x}{x^5}}_{L\left(\frac{0}{0}\right)}}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\mathrm{tg}\,x)(x^2+x\cdot\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^2x)}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}\,x}{x^3}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}+\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^2\right)}_{3}=$$

$$=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}\,x}{x^3}\overset{H}{=}\cancel{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2x}}{\cancel{3}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}^2x}{x^2}=-1$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1\right]$$

$$f'(0)=\sqrt[5]{-1}=-1.$$

386 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Care dintre afirmațiile următoare este adevărată?

~~A~~ f nu este continuă în $\mathbf{0}$ B f este derivabilă în $\mathbf{0}$ ~~C~~ f nu are limită în $\mathbf{0}$

D există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ E f are limită la $+\infty$ egală cu $\mathbf{1}$ și la $-\infty$ egală cu $-\mathbf{1}$

$$\underbrace{0\le |f(x)|\le x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2}_{(x\to 0)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

$\Rightarrow f$ continuă în 0.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\underbrace{0\le\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|}_{(x\to 0)}$$

$f'(0)=0$

Studiu individual:

De calculat $f'(x)$ $(x\neq 0)$ și de arătat că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

399 Derivata de ordinul **100** a funcției $f(x) = x^{99}\ln x \quad (x>0)$ este ...

Rezolvare.

$$\left(x^{99}\ln x\right)^{(100)} = \left(\left(x^{99}\cdot\ln x\right)'\right)^{(99)} = \left(99x^{98}\cdot\ln x + x^{99}\cdot\frac{1}{x}\right)^{(99)} =$$

$$= 99\cdot\left(x^{98}\ln x\right)^{(99)} + \underbrace{\left(x^{98}\right)^{(99)}}_{0} = 99\cdot\left(x^{98}\ln x\right)^{(99)}$$

[n în loc de 99]

$$\left(x^{n}\ln x\right)^{(n+1)} = n\cdot\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)} = n(n-1)\cdot\left(x^{n-2}\cdot\ln x\right)^{(n-1)} = \ldots =$$

se aplică de n ori succesiv

$$= n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1\cdot\left(x^{0}\cdot\ln x\right)' = \frac{n!}{x}$$

Ⓡ $\frac{99!}{x}$.

376 Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă și sunt verificate condițiile:

$$f(0)=2, \qquad f'(x)=3f(x) \quad \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Valoarea $f(\ln 2)$ este ...

Rezolvare.

$$f'(x)-3f(x)=0 \;\Big|\cdot e^{-3x}$$

$$(e^{ax})'=a\cdot e^{ax}$$

$$e^{-3x}\cdot f'(x)+\left(e^{-3x}\right)'\cdot f(x)=0$$

$$\left(e^{-3x}\cdot f(x)\right)'=0$$

$$\underset{(\forall x)}{e^{-3x}\cdot f(x)=C} \text{ (constantă)} \overset{[x=0]}{=\!=\!=} e^{0}\cdot f(0)=2$$

$$\Rightarrow f(x)=2\cdot e^{3x}$$

$$f(\ln 2)=2\cdot\left(e^{\ln 2}\right)^3=2\cdot 2^3=\underline{16}$$

(!) Abordare similară la problema cu dobânda compusă. (cu (r) în loc de (3) și $f(0)=S_0$)

Resurse online (câteva recomandări) în limba engleză

- Despre *istoria Analizei Matematice* și a noțiunilor de derivată, respectiv integrală:
  https://www.youtube.com/watch?v=6wb60tcilMQ
  https://www.youtube.com/watch?v=ObPg3ki9GOI
  https://www.youtube.com/watch?v=LN-erHStqA
- *The Essence of Calculus* (o prezentare *vizuală* a noțiunilor de bază din Analiza Matematică):
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr
- *Funcții continue, fără derivată*:
  https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function
  https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake